

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-François Dantzer

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

I Partie A - Espaces complets

I.1 Définitions et premières propriétés [Dan]

Déf 1 (Suite de Cauchy) :

- Prop 2 :** (1) Une suite convergente dans X est de Cauchy.
 (2) Toute suite de Cauchy dans X est bornée.
 (3) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est encore de Cauchy.

Prop 3 : Une suite de μ Cauchy est convergente si et seulement si elle possède une valeur d'adhérence.

Déf 4 (Espace complet) :

Rem 5 : On ne connaît pas la limite.

Ex 6 : $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

Contre-Ex 7 : $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$ n'est pas complet.

Prop 8 : Si A est complet, A est fermé dans X . Réciproquement, si X est complet et A est fermé, alors A est complet.

Ex 9 : Les ouverts ne sont donc pas complets : $]0, 1[$ n'est pas complet.

Prop 10 (Produit, intersection d'espaces complets) :

I.2 Espaces de Banach [Li] [Ber-Ber]

Déf 11 (Espaces de Banach, de Hilbert) :

Ex 12 : Espaces de dimension finie

Thm 13 (Critère de Banach avec la convergence de séries) :

App 14 (Riesz-Fischer) :

Thm 15 (Espace $\mathcal{C}^0$) :

 **Dév 16 (Espaces de Bergman) :**

Prop 17 : Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Ex 18 : E^* est toujours complet.

App 19 : Si $\|u\| < 1$, alors $Id - u$ est inversible.

Prop 20 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) :

II Partie B - Les gros théorèmes [Dan][Gou][Ber-Ber]

II.1 Point fixe de Picard

Thm 21 (Point fixe de Banach) :

Contre-Ex 22 : Ce n'est plus vrai si $k \geq 1$: $X = \mathbb{N}$ et $f(n) := kn + 1$.

Contre-Ex 23 : Ce n'est plus vrai si X n'est pas complet : $X =]0, 1]$, $f(x) = x/2$.

App 24 : Soit $A = M - N$ avec $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, alors la suite $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + c$ converge pour toute donnée initiale.

Thm 25 (Cauchy-Lipschitz) :

 **Dév 26 (TIL) :**

II.2 Prolongement sur un espace complet

Thm 27 (Prolongement d'applications u -continues) :

App 28 (Plancherel) :

III Partie C - Baire, Baire, Baire [Li]

Thm 29 (Baire) :

Rem 30 : Autre formulation du théorème de Baire

Thm 31 : L'ensemble des fonctions dans $\mathcal{C}([0, 1])$ qui ne sont dérivables en aucun point est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$, c'est même une densité générique.

App 32 : Soit $X \subset \mathcal{C}^1([0, 1])$ un sev fermé de $\mathcal{C}([0, 1])$. Alors X est de dimension finie.

Thm 33 (Banach-Steinhaus) :

Thm 34 (Application ouvert) :

Thm 35 (Isomorphisme de Banach) :

Thm 36 (Graphe fermé) :

App 37 : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow \mathcal{C}^0$ n'est pas surjective.

App 38 : Si E_1 et E_2 sont deux sev fermés supplémentaires, alors ils sont supplémentaires topologiques.

IV Partie D - Hilbert, quel est votre métier ? [Li]

Thm 39 (Projection sur un convexe) :

Ex 40 (Projection sur un sev fermé) :

Ex 41 (Projection sur des figures) : [Annexe : Projection sur un carré, c-ex]

App 42 (Exercice de minimisation d'une intégrale) :

Thm 43 (Supplémentaire topologique orthogonal) :

Thm 44 (Critère de densité) :

App 45 (Densité de $\mathcal{C}_c$) :

Thm 46 (Hahn-Banach géométrique) :

App 47 (Sup de fonctions convexes) :